1. LA FRONTERA DELS MODELS MATEMÀTICS

Carles Perelló*

La matemàtica és com el llenguatge, una habilitat emergent de la interacció de l'home amb el seu entorn. Li dóna la capacitat d'expressar amb precisió propietats quantitatives i qualitatives dels fenòmens amb què es troba: la quantitat, la forma, l'estructura, etc. Ha esdevingut l'eina amb la qual es poden modelitzar, mitjançant els seus conceptes i símbols abstractes, les característiques dels objectes i les lleis que regulen el seu comportament. Aquests models permeten entendre, és a dir, racionalitzar, millor els fenòmens que observem, fins al punt que podem, en molts casos, fer prediccions acurades.

Entre els primers models matemàtics que no es limitaven a donar eines per a comptar i mesurar es troba el treball d'Arquimedes sobre els cossos flotants. En aquest treball es determina l'estabilitat d'objectes en forma de paraboloides de revolució truncats i massissos que suren, com si fossin naus marines. Ja no es tracta només de comptar i de mesurar, ni tampoc de descriure, com en els *Elements* d'Euclides, sinó d'aplicar les relacions matemàtiques conjuminades amb les lleis abstretes de l'observació, que en el cas del nostre savi de la Magna Grècia eren les de la palanca i les de les forces sobre els cossos submergits o no, per poder dir quelcom important sobre l'estabilitat dels cossos flotants. Amb tot, dubtem que els resultats d'Arquimedes fossin utilitzats per al disseny de naus, encara que, certament haurien de contribuir a la comprensió del motiu del seu trabucament.

El treball que acabem d'esmentar d'Arquimedes constitueix vertaderament una gran excepció: de fet és l'únic treball de ma-

* Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra.

temàtica aplicat a l'explicació d'un fenomen dinàmic que es basa en les lleis de la física abans de Galileu. Certament, mentrestant es va utilitzar la matemàtica per a donar models de comportament, però eren models descriptius i no servien per a explicar aquest comportament a partir de lleis físiques elementals. Per exemple els models geomètrics del sistema solar donats per Ptolemeu, Copèrnic i Kepler eren d'aquest tipus.

De fet no va ser fins que es va respectar la natura, és a dir, fins que es va observar i experimentar amb fenòmens naturals, en comptes de treure's del cap (o d'algun llibre) les lleis de comportament, que no es va començar a desenvolupar la ciència moderna i, amb ella, la matemàtica, que en forma part solidària. Això va ocórrer al segle XIV, quan a Europa la filosofia escolàstica va entrar en crisi. Amb tot encara haurien de passar alguns segles abans no es poguessin obtenir models matemàtics vàlids i no trivials que expliquessin els fenòmens físics.

Un dels primers exemples és el comportament sota l'acció de la gravetat d'un objecte llençat al buit, que va ser explicat per Galileu a principis del segle XVII, dos mil anys després dels treballs d'Arquimedes!

Observem, però, que a principis del segle XVII ja s'havien fet obres humanes de gran envergadura, com són les esglésies gòtiques, de les quals avui no sabríem garantir el seu bon comportament sense una gran quantitat de càlculs, i possiblement amb un ordinador poderós. Aquestes construccions eren producte d'una llarga experiència del gremi corresponent i moltes s'ensulsiaven a mig fer.

En temps de Galileu, Fermat i Descartes van crear la geometria analítica i junt amb matemàtics de l'època van començar a bastir el càlcul infinitesimal i l'àlgebra moderna. A mitjan segle XVII destaca la utilització de la matemàtica en la modelització del comportament dels pèndols, amb el treball de Huygens, que, a part d'inventar el rellotge de pèndol, demostra la isocronia del pèndol cicloïdal. En el seu mètode de treball Huygens resulta un seguidor prou ajustat d'Arquimedes.

Amb tot, el progrés de la ciència i la seva matematització van ser prou lents fins que al mètode experimental no se li va afegir l'eina matemàtica apropiada per a expressar les lleis de la natura i per a modelitzar i tractar matemàticament els fenòmens.

El desllorigador, el que va obrir la capsa de Pandora, va ser el càlcul infinitesimal que havent estat gestat al llarg del segle XVII veu la llum a finals d'aquest segle de la mà de Newton i de Leibniz.

Aquesta eina permet expressar les lleis de la natura amb precisió, tant les que es refereixen al moviment com les que tracten de la forma de les coses. El primer exemple de la seva aplicació és la llei de Newton que relaciona la segona derivada de la posició amb la força sobre una partícula. Aquesta llei junt amb la de la gravitació de Newton mateix, que expressa la força que les partícules materials exerceixen entre elles segons la seva posició, li permet, ara sí, explicar els moviments dels planetes. I és amb aquestes eines que avui encara calculem la trajectòria d'astres i satèl·lits.

Després de les lleis de la gravitació i de la mecànica de partícules van anar apareixent nous models. En particular Euler a mitjan segle XVIII explica el comportament dels cossos rígids i començant amb el disseny d'una turbina hidràulica a reacció introdueix les lleis de la hidrodinàmica. També s'ocupa de la deformació i dels esforços en barres elàstiques (bigues i columnes), i arriba a donar el primer exemple de pèrdua d'estabilitat per bifurcació (arqueig de columnes). Per a fer tot aquest treball ha d'introduir tot un seguit de conceptes i notacions dintre del càlcul infinitesimal. Així com a Newton se li poden atribuir les primeres equacions diferencials ordinàries com a models, a Euler li corresponen les equacions en derivades parcials.

El segle XIX comença amb l'estudi que fan Cauchy i d'altres sobre l'equilibri de cossos elàstics, on introdueix per primera vegada de manera clara els conceptes d'esforç i de deformació i les seves relacions, que amb el temps donaran lloc a l'anàlisi tensorial. També en aquest mateix principi de segle Fourier fa el seu treball sobre transmissió de calor, i introdueix les eines matemàtiques de les sèries i la transformada que porten el seu nom.

Amb les eines de càlcul que s'anaven creant i amb l'expressió matemàtica de les lleis de la natura, la matemàtica va permetre modelar (i calcular) estructures mecàniques, bombes hidràuliques, turbines, calderes i mecanismes diversos.

A més de l'aplicació pràctica de la matemàtica, la segona meitat del segle XIX va veure aparèixer les grans teories de la física: les lleis de l'electromagnetisme amb Maxwell, les de la termodinàmica amb Boltzmann i d'altres, que ja van necessitar la seva pròpia matemàtica per a expressar-se, com passa, ja entrat el segle XX, amb la teoria de la relativitat general d'Einstein, que precisa de la geometria diferencial i en particular de l'anàlisi tensorial, i amb la mecànica quàntica que porta cap a un desenvolupament de l'anàlisi funcional, de la teoria de representacions, dels grups de transformacions, etc.

Cal esmentar aquí les aplicacions que tenen cada vegada més els models matemàtics a la biologia (a la dinàmica de poblacions, per exemple), a la química (a la cinètica de reaccions i la difusió, el control, etc.), a l'economia, a la termodinàmica lluny de l'equilibri, a la meteorologia, a l'estudi global dels canvis climàtics, etc.

En tot aquest procés les equacions diferencials han anat prenent més i més importància, d'una banda, perquè moltes lleis de la natura s'han expressat en els seus termes i, de l'altra, perquè, a pesar de les dificultats que presenta poder extraure'n resultats pràctics, això ha estat possible gràcies al progrés dels mètodes matemàtics i al fet que són tractables amb mètodes numèrics mitjançant els ordinadors digitals, que com que s'han anat fent cada cop més ràpids i capaços permeten fer càlculs que sense ells serien inacabables. És així com a finals del segle XIX, de la mà de Poincaré i d'altres s'introdueixen mètodes i conceptes, molts d'ells qualitatius, que permeten tractar els problemes d'estabilitat i de comportament asimptòtic, i que han resultat de gran importància per a la comprensió i tractament de molts fenòmens.

De fet els terrenys de la ciència en què els problemes dinàmics no han pogut ser reduïts a equacions diferencials han progressat poc en el seu tractament pràctic. Així passa per exemple amb la teoria de la relativitat i amb la mecànica quàntica: partint de les seves lleis no podem resoldre, ni expressar, els problemes de la dinàmica que tractem amb les lleis de Newton.

Fet aquest esbós molt incomplet de l'escalada mútua entre la ciència matemàtica i la seva aplicació pràctica, potser cal fer un repàs ràpid d'alguns dels camps de la tecnologia actual on la utilització dels models matemàtics resulta del tot indispensable.

1. Disseny i operacions d'avions, submarins, coets, satèl·lits, reactors nuclears, estructures i maquinària diversa, etc.
2. Predicció meteorològica.
3. Explotació pesquera i d'altres problemes ecològics.
4. Dinàmica econòmica.
5. Disseny d'elements de sistemes informàtics i de comunicació.
6. Fusió nuclear.
7. Estudis dels corrents marins, dels canvis climàtics globals, de la geodinàmica, dels aqüífers, etc.

Tot seguit analitzarem cada apartat.

1. A l'apartat 1 hem posat una llista, per força incompleta, dels problemes tecnològics que estan bàsicament resolts amb l'ajut

dels models matemàtics. Avui ja no s'introdueix un model d'avió dins un túnel de vent per a provar-lo, sinó que es simula el seu comportament aerodinàmic en un ordinador digital, que resol les equacions diferencials que modelen les condicions a les quals estarà subjecte l'aparell real.

En els altres apartats hem llistat una sèrie de problemes tecnològics que s'aborden matemàticament, amb models que fan servir les equacions diferencials, però que per culpa de diferents dificultats no es resolen del tot satisfactòriament. De fet direm que estan al límit, a la frontera de les capacitats de resolució mitjançant les eines matemàtiques.

2. Les dificultats en la predicció meteorològica són múltiples. El model que s'hauria de fer és massa complicat i és inviable a causa de la gran quantitat de coses que s'han de tenir en compte: orografia, tridimensionalitat, vents, humitat, temperatura, pressions, composició atmosfèrica, escalfament pel sol i per la terra, etc. El que es fa és utilitzar sistemes d'equacions en derivades parcials que simplifiquen molt el model per a la predicció global i particularitzar per a petites regions tenint en compte més factors. D'altra banda, el model, tot i simplificat, és prou complex per a necessitar un tractament amb els ordinadors més potents que es tenen; amb tot el nombre de dades sobre les condicions inicials que s'admeten és molt limitat, la qual cosa també limita l'exactitud del resultat. A més a més la dinàmica atmosfèrica és prou inestable perquè les prediccions no siguin vàlides si es volen fer per un temps massa llarg o segons la magnitud i exactitud del que es vulgui predir, per exemple, és impossible predir el temps que farà al cap d'un parell de dies.

3. Als problemes de dinàmica de poblacions i d'altres aspectes de l'ecologia ens trobem amb models d'equacions diferencials o amb diferències. Aquí la dificultat no es troba tant en el tractament matemàtic del model com en la seva validesa. El món de la vida és molt complex i desconegut i, en general, els models que se'n fan són tan simplificats i se'n coneixen els paràmetres tan malament que la seva fiabilitat és poca. Tot i així, ajuden a entendre els processos d'interaccions biològiques.

4. Poder pronosticar el futur de l'economia és un dels grans temes d'actualitat. Una altra vegada ens trobem amb una problemàtica molt complexa on, a més, entren les accions humanes. Actualment els estudis matemàtics de teoria econòmica es centren en els estudis dels equilibris i en la seva dependència en paràmetres. Per a

fer un estudi de la dinàmica macroeconòmica caldria tenir un bon coneixement de les lleis que la determinen i plasmar-les en un model matemàtic. Certament, tot i que hi ha força estudis amb equacions diferencials de problemes econòmics aïllats, en què l'home apareix com a controlador exterior, s'està lluny de poder-lo tenir en compte com un element dinàmic més, en què les seves decisions depenen de les altres variables del sistema.

5. Els elements de sistemes informàtics i de telecomunicacions ens porten cap al món microscòpic. Tot i que els models de les teories clàssiques són útils, ja hi apareixen problemes quàntics i relativistes que fan inviable una predicció totalment rigorosa.

6. El subministrament d'energia per fusió nuclear és un dels reptes seriosos que ha tingut la humanitat des del descobriment del fet que en unir-se nuclis d'elements lleugers es podia alliberar energia aprofitable per a l'home. Els darrers cinquanta anys han vist l'esforç continuat dels científics per a poder domesticar aquesta font d'energia per a profit de la societat. No ha estat debades; els *tokamaks* i els *stellarators* són promeses del fet que en un termini no massa llarg, deu o vint anys, es podrà obtenir energia útil d'aquests dispositius. Aquest és un bell exemple, ja no de la utilitat dels models matemàtics, sinó de la seva indispensabilitat. Així com és concebible, i realitzable, la construcció d'una catedral gòtica sense càlculs matemàtics sobre la resistència i l'estabilitat de la seva estructura, no és gens concebible anar construint prototips de *tokamaks* per veure com es van comportant, i desembocar així a l'enginy reexit. Quan s'emprèn la construcció d'un d'aquests aparells, on s'esmercen bilions de pessetes i en què el seu bon funcionament depèn críticament dels paràmentres de construcció, s'ha de comptar necessàriament amb una simulació matemàtica a partir d'un model, que en aquest cas es fa a base d'equacions en derivades parcials.

7. L'estudi global del planeta Terra pel que fa a les seves condicions climàtiques representa un esforç enorme, en què s'han de tenir en compte les condicions astronòmiques i les interaccions entre els diferents components... —atmosfera, aigua, terra, vegetació, fauna, gels, éssers humans, etc.— a més del comportament per separat de cada un d'aquests per a poder fer un pronòstic vàlid. Aquest tipus d'estudi s'està portant a terme de manera parcial, per sectors, i exigeix models en què s'hagin fet simplificacions justificades que amitjanin les variables, d'altra manera contindria tant la meteorologia, com l'ecologia, com l'economia, que pel seu compte són prou intractables.

Com ha quedat patent dels exemples anteriors, hi ha diverses menes d'obstacles per a la completa satisfacció pel que fa a l'explicació i la predicció dels processos tecnològics i naturals. Certament un dels límits està donat per la possibilitat o no d'esbrinar la configuració i les lleis (naturals) que s'apliquen a un fenomen. Per exemple, un de ben sorprenent: quin paper té la llibertat, és a dir, l'albir humà (o no humà!) en els processos del món. Nosaltres, per simplificar, fem que l'acció de l'home aparegui als nostres models com a determinador de les condicions inicials, de frontera i en general de tots els mecanismes de «control» (govern) que suposem exteriors al seu procés autònom. Hi ha molts fenòmens que encara romanen sense teoria matematitzable, encara que van sent incorporats en el camp de la psicologia, la biologia, etc. En alguns casos com en el de la morfogènesi hi ha la «idea» del mecanisme, però sembla impossible aplicar-la a causa de la seva complexitat.

Una altra mena d'obstacle consisteix en el fet que els mètodes matemàtics que posseïm no siguin els adequats per a portar més endavant la resolució de certs problemes. Això pot passar amb la teoria de la relativitat i la mecànica quàntica. Una mica com passava abans de l'aparició del càlcul infinitesimal. Tenim dues possibilitats: o bé apareixeran nous mètodes, que ja s'haurien d'estar gestant (de la mateixa manera que s'estaven gestant els mètodes del càlcul infinitesimal molt abans de la seva aparició), o bé no n'apareixeran, ja sigui perquè no es trobin o ja sigui perquè no n'hi hagi!

Hi ha un obstacle que ja ha aparegut, i és el de la complexitat. Aquesta frontera apareix de dues maneres. D'una banda, hi ha la complexitat externa del sistema tecnològic o natural, que té tants components que resulta pràcticament impossible tenir en compte tots els factors que hi participen i que, si els poguéssim incorporar al model, aquest resultaria intractable des del punt de vista matemàtic o computacional.

D'altra banda, tenim la que anomenarem *complexitat interna*, i que es deu, no al fet que no es puguin tenir en compte tots els factors rellevants, ni al fet que el model matemàtic resulti particularment complex: poden ser poques variables i poques equacions, sinó al fet que es presentin fenòmens d'inestabilitat interna, als quals s'associen els noms de caos, atraient estrany, dinàmica complicada, quasi aleatorietat, etc., que fan impossible (no molt difícil, sinó impossible) poder fer prediccions a terminis relativament llargs.

Finalment, vull fer notar que hi ha dues maneres de tractar un model matemàtic, essencialment diferents, i que les dues tenen les seves limitacions.

Una és la consideració rigorosa del model, diguem un sistema d'equacions diferencials, a partir del qual volem saber quin és el comportament d'algunes solucions. Els mètodes matemàtics de què disposem per a la resolució d'aquest tipus de problemes estan força limitats: hi ha uns quants sistemes teòricament tractables, però, certament, la majoria no ho són. Per exemple, sabem que en un model evolutiu de presa-depredador hi ha un equilibri de coexistència, però som totalment incapaços d'escatir-ne l'estabilitat o de saber si hi ha alguna diferència caòtica. Per què? Pot ser degut a poca traça o poc coneixement dels que hem abordat el problema, però també pot haver-hi una raó més pregona: que s'hagi d'inventar un nou mètode o que no n'hi hagi cap. Simplificar el model és un procediment normal. Hi ha casos, però, en què la simplificació no és acceptable: falsejaria totalment el problema.

L'altra és el tractament numèric del model, en el qual s'utilitzen els recursos dels ordinadors digitals per anar trobant les solucions que ens interessen, o algunes d'elles, i a partir d'això extraure les conclusions que ens interessin. Ja hem esmentat que les limitacions en aquest cas solen ser degudes a les capacitats dels ordinadors i també, és clar, a l'eficàcia dels mètodes de càlcul que fem servir. D'aquesta manera les possibilitats de l'ordinador constitueixen la frontera dels problemes que es poden tractar. És en aquest sentit on sembla que més s'ha anat fent retrocedir les fronteres de les possibilitats. Sense els ordinadors digitals tots els fenòmens referents al caos havien passat pràcticament desapercebuts i molts dels càlculs en què es necessiten solucions precises de les equacions: els llançaments de satèl·lits, per exemple, serien del tot impossibles.

Si hagués de resumir en unes quantes paraules com evolucionaran els models matemàtics i el seu tractament, diria que, a menys que apareguin nous mètodes, que no em puc ni imaginar, hi haurà una desacceleració, no en la incorporació de nous models, que seguiran apareixent i invadint, per exemple, les ciències econòmiques, etc., fins a arribar als nivells de la física, sinó en el tipus i la complexitat dels que siguin tractables matemàticament. Aquesta desacceleració serà mitigada per l'aparició d'eines de càlcul numèric molt més potents.